جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2014 - 2015
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة $\{0, 2\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة Z_6 .
(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_4(20)$ من الزمرة $U(20)$ يساوي 5.
(3) مرتبة العنصر (-1) في الزمرة $(Q, +)$ تساوي 2.
(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = \{1, 11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 8 .
(5) إن العنصر a^3 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 21 .
(6) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^5 في G تساوي 12.
(7) عدد عناصر زمرة الخارج $Z_{30}/< 6 >$ يساوي 5 .
(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة أولر $U(7)$ يساوي 6 .
(9) عدد الزمر الجزئية في زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ يساوي 4 .
(10) إذا كان $\varphi: U(30) \to U(30)$ تشاكلاً وكان $Ker\,\varphi = \{1, 11\}$ و $\varphi(7) = 7$ فإن $\varphi^{-1}(7) = 7 \cdot ker\,\varphi$.
(11) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12.
(12) إن الزمرة $Z \oplus Z$ دوارة لأن Z زمرة دوارة.
(13) رتبة العنصر $(2, 3)$ من الزمرة $Z_4 \oplus Z_3$ يساوي 6 .
(14) إن $U(8) \cong Z_2 \oplus Z_2$.

السؤال الثاني (28 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G، علل صحة ما يلي:

(1) أياً كان $a \in G$، فإن المجموعة $C(a) = \{x : x \in G; ax = xa\}$ هي زمرة جزئية من G.
(2) إذا كان $a, b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ فإن $a . b = b . a$.
(3) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .
(4) كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري غامر.

السؤال الثالث (30 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة منتهية ما.

(1) اذكر نص مبرهنة لاغرانج وبرهانها ثم اذكر نص عكسها .
(2) إذا كانت مرتبة G تساوي pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان، فإن مرتبة مركز الزمرة G $(Z(G))$ ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .
(3) لتكن مرتبة G تقبل القسمة على العدد الأولي P. عرف الـ P- زمرة سيلوفية ، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 15.

2015 - 7 - 12

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة

حل دورة 2014 - 2015

الدورة الثانية

بنى جبرية 1

١- خطأ لأن العملية (+) ليست عملية داخلية و $2+2=4\notin\{0,2\}$

٢- خطأ: ٤ عناصر : $U_{20}=\{1,3,7,9,11,13,17,19\}$

بل ثمانية (1) $U_{4}(20)=\{1,9,13,17\}$

٣- خطأ، غير غرضية

٤- خطأ يساوي ٤

٥- خطأ $\gcd(3,21)=3\neq 1$ وبالتالي غير مولد

٦- صح

٧- خطأ: عدد الصفوف سبعة $<6>=\{6,12,18,24,0\}$

$Z_{30}=\{0,1,2,\ldots,29\}$

$0+<6>=<6>$ $\quad 1+<6>=\{7,13,19,25,1\}$

$2+<6>=\{8,14,20,26,2\}$ $\quad 3+<6>=\{9,15,21,27,3\}$

$4+<6>=\{\ \}$ $\quad 5+<6>=\{\ \}$

$6+<6>=$ يتكرر فقط

٨- خطأ يساوي 5

n:d7	1	2	3	4	5	6
3	3	6	2	5	(1)	4

و $U_7=\{1,2,3,4,5,6\}$

٩- صح

١٠- صح

١١- خطأ يساوي 6 $\quad \gcd(12,30)=2\times 3=6$

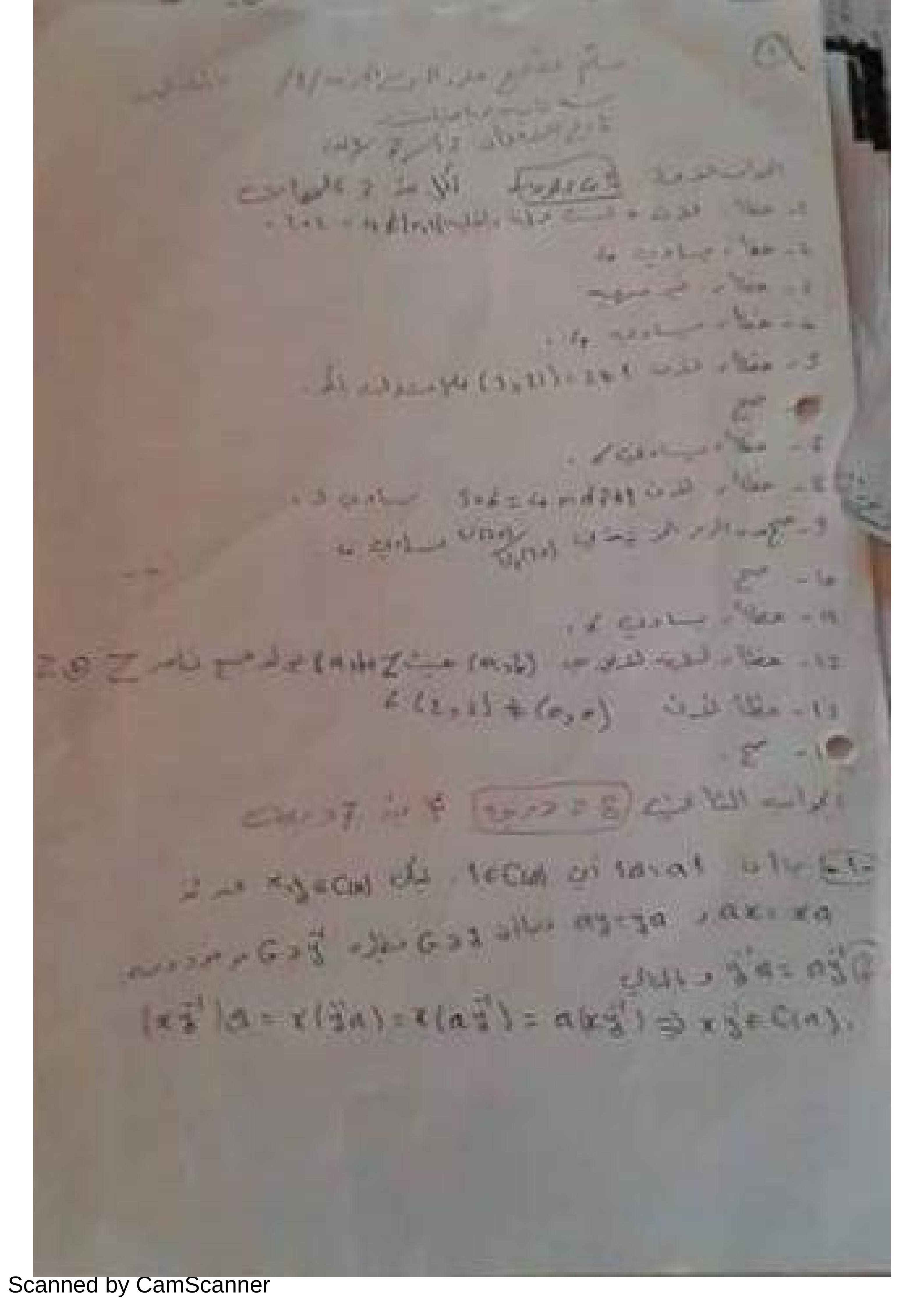
30	2
15	3
5	5
1	

12	2
6	2
3	3
1	

١٢- خطأ لا يوجد (a,b) و $a,b\in Z$ يحقق ذلك في عناصر $Z\oplus Z$

١٣- $6(2,3)\neq(0,0)$

١٤- صح



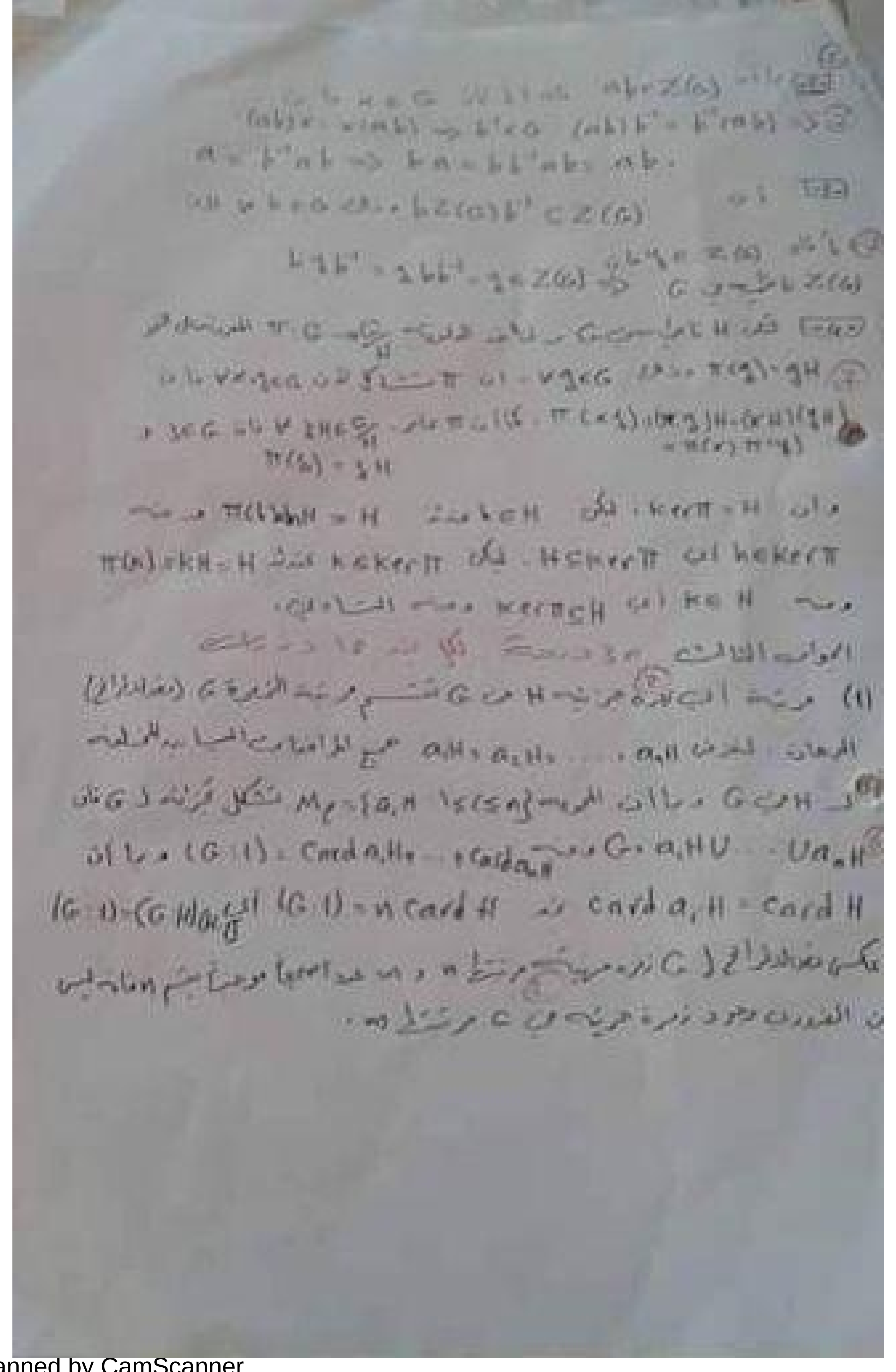
[illegible]

السؤال الأول ([illegible])

1- خطأ، [illegible]
2- خطأ، يساوي [illegible]
3- خطأ، [illegible]
4- خطأ، يساوي [illegible]
5- خطأ، لأن [illegible] $(3,1)$ [illegible]
6- صح
7- خطأ، يساوي [illegible]
8- خطأ، لأن [illegible] يساوي [illegible]
9- [illegible] يساوي [illegible]
10- صح
11- خطأ، يساوي [illegible]
12- خطأ، لأن [illegible] (a,b) [illegible]
13- خطأ لأن $(2,1) \neq (a,a)$
14- صح.

السؤال الثاني (8 درجات) [illegible]

1- بما أن $a \in C(H)$ [illegible] ليكن $x, y \in C(H)$ [illegible]
$ax = xa$ ، $ay = ya$ [illegible] $y^{-1} \in G$ [illegible]
$ay^{-1} = y^{-1}a$ وبالتالي
$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = a(xy^{-1}) \Rightarrow xy^{-1} \in C(H)$.



$(ab)x = x(ab) \Rightarrow b^{-1} \in G \quad (ab)b^{-1} = b^{-1}(ab)$

$a = b^{-1}ab \Rightarrow ba = bb^{-1}ab = ab.$

$b \in G \ldots bZ(G)b^{-1} \subset Z(G)$

$bgb^{-1} = gbb^{-1} = g \in Z(G)$

$\pi(g) = gH$ ... $\forall g \in G$ ...

$\pi(xg) = (xg)H = (xH)(gH) = \pi(x)\pi(g)$

$\pi(g) = gH$

وإن $\ker\pi = H$ لأن ... $k \in H$ ... $\pi(k) = kH = H$

وإن $h \in \ker\pi$ ... $H \subset \ker\pi$ ... $k \in \ker\pi$ ... $\pi(k) = kH = H$

... $k \in H$ ... $\ker\pi \subset H$ ...

السؤال الثالث

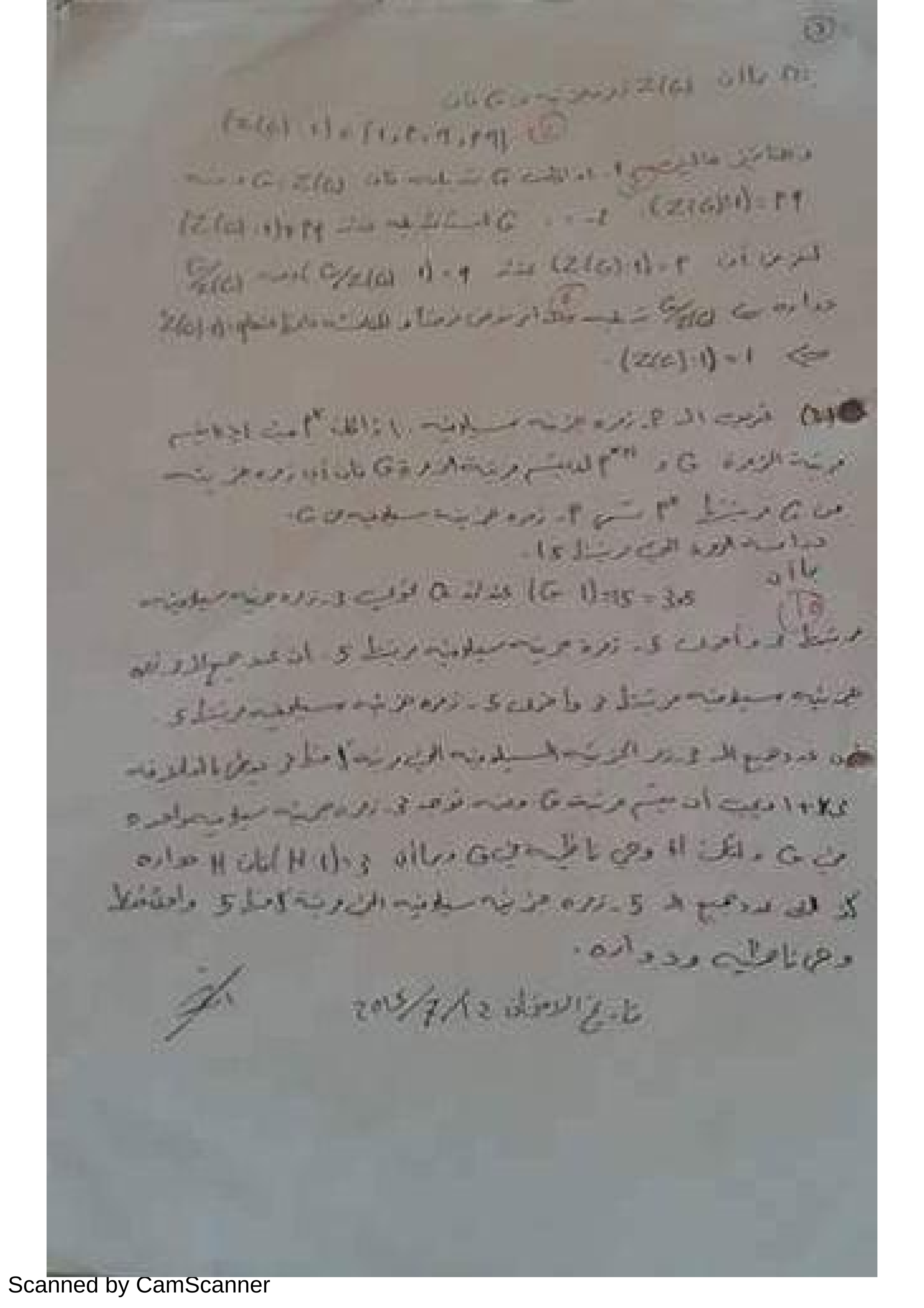
(1) مرتبة الزمرة الجزئية H من G تقسم مرتبة الزمرة G (مبرهنة لاغرانج)

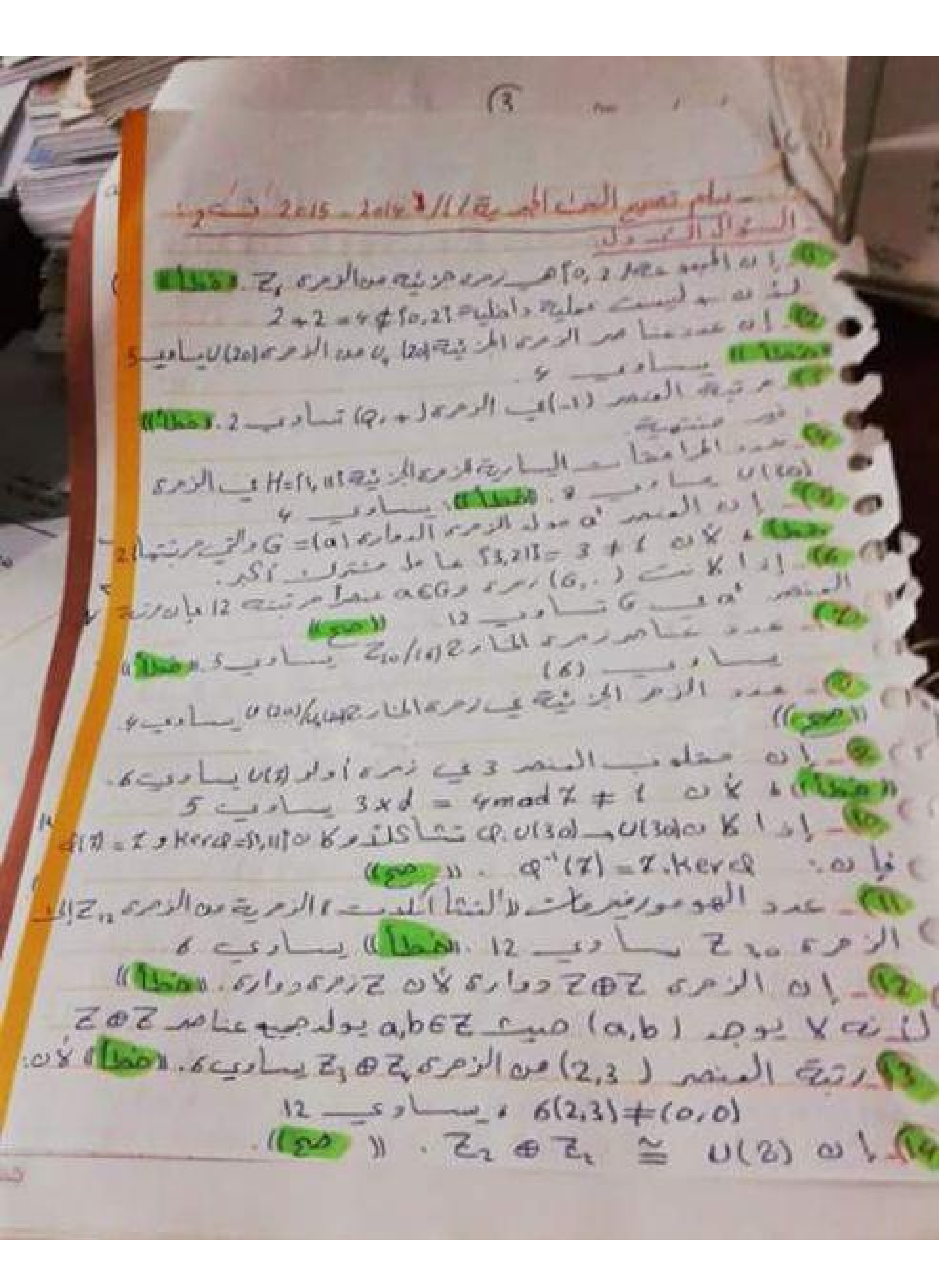
البرهان: لتكن $a_1H, a_2H, \ldots, a_nH$ جميع المجموعات المشاركة اليسارية

لـ H في G ... $M_l = \{a_iH \mid 1 \le i \le n\}$ تشكل تجزئة لـ G

$G = a_1H \cup \ldots \cup a_nH$ ... $(G:1) = \text{card}\, a_1H + \ldots + \text{card}\, a_nH$

$\text{card}\, a_iH = \text{card}\, H$ ... $(G:1) = n\, \text{card}\, H$ ... $(G:1) = (G:H)(H:1)$





③

سلم تصحيح الحلقة الجبرية 1/1/ 2014 - 2015 شتوي

السؤال الأول

1) إن المجموعة $\{0, 2\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة Z_4. «خطأ» لأنها ليست مغلقة داخلياً $2+2=4 \notin \{0,2\}$

2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $\langle 20 \rangle$ في Z_{24} من الزمرة (20) لا يساوي 5 يساوي 6. «خطأ»

3) رتبة العنصر (-1) في الزمرة $(Q,+)$ تساوي 2. «خطأ» غير منتهية

4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1,11\}$ في الزمرة $U(20)$ يساوي 8. «خطأ» يساوي 4

5) إن العنصر a^6 مولد الزمرة الدوارة $G=\langle a \rangle$ والتي رتبتها 21. «خطأ» لأن $(6,21)=3 \neq 1$

6) إذا كانت $(G,.)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً رتبته 12 فإن رتبة العنصر a^5 في G تساوي 12 «صح»

7) عدد عناصر زمرة القسمة $Z_{20}/\langle 12 \rangle$ يساوي 5. «خطأ» يساوي (4)

8) عدد الزمر الجزئية في زمرة القسمة $U(20)/\langle 11 \rangle$ يساوي 4 «صح»

9) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة أولر $U(7)$ يساوي 6. «خطأ» لأن $3 \times 6 = 4 \bmod 7 \neq 1$ يساوي 5

10) إذا كان $\varphi: U(30) \to U(30)$ تشاكل زمر وكان $\ker\varphi=\{1,11\}$ و $\varphi(7)=7$ فإن: $\varphi^{-1}(7) = 7.\ker\varphi$. «صح»

11) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12. «خطأ» يساوي 6

12) إن الزمرة $Z \oplus Z$ دوارة لأن Z زمرة دوارة. «خطأ» لأنه لا يوجد (a,b) حيث $a,b \in Z$ يولد جميع عناصر $Z \oplus Z$

13) رتبة العنصر $(2,3)$ من الزمرة $Z_3 \oplus Z_4$ يساوي 6. «خطأ» لأن: $6(2,3) \neq (0,0)$ ، يساوي 12

14) إن $U(8) \cong Z_2 \oplus Z_2$. «صح»

السؤال الثامن: لتكن $(G,.)$ زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G.

1) أياً كان $a \in G$ فإن المجموعة $C(a)=\{x : x \in G, ax=xa\}$ هي زمرة جزئية من G.

- بما أن: $ea=ae$ أي $e \in C(a)$، ليكن $x,y \in C(a)$ عندئذ $ax=xa$ و $ay=ya$ وبما أن $y \in G$ فنظيره $y^{-1} \in G$ موجود ومنه $y^{-1}a=ay^{-1}$ وبالتالي:

$$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = a(xy^{-1}) \Rightarrow xy^{-1} \in C(a)$$

2) إذا كان $a,b \in G$ حيث $a.b \in Z(G)$ فإن $a.b=b.a$.

- بما أن: $ab \in Z(G)$ فإنه أياً كان $x \in G$ فإن:

$$(ab)x = x(ab) \Rightarrow b^{-1} \in G : (ab)b^{-1} = b^{-1}(ab) \Rightarrow$$
$$a = b^{-1}ab \Rightarrow ba = bb^{-1}ab = ab$$

3) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G.

- إثبات: $bZ(G)b^{-1} \subseteq Z(G)$ وذلك $\forall b \in G$ لأنه أياً كان $y \in Z(G)$ فإنه:

$$byb^{-1} = ybb^{-1} = y \in Z(G) \Rightarrow Z(G) \text{ ناظمية في } G$$

4) كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري ما.

- لتكن H ناظمية في G ولنأخذ الملحقة $\pi : G \to G/H$ المعرفة على الشكل التالي $\pi g = gH$ وذلك $\forall g \in G$

ان π تشاكل لأن: $\forall x,y \in G$ فإنه:

$$\pi(xy) = (xy)H = (xH)(yH) = \pi(x)\pi(x)$$

كما أن π غامر.

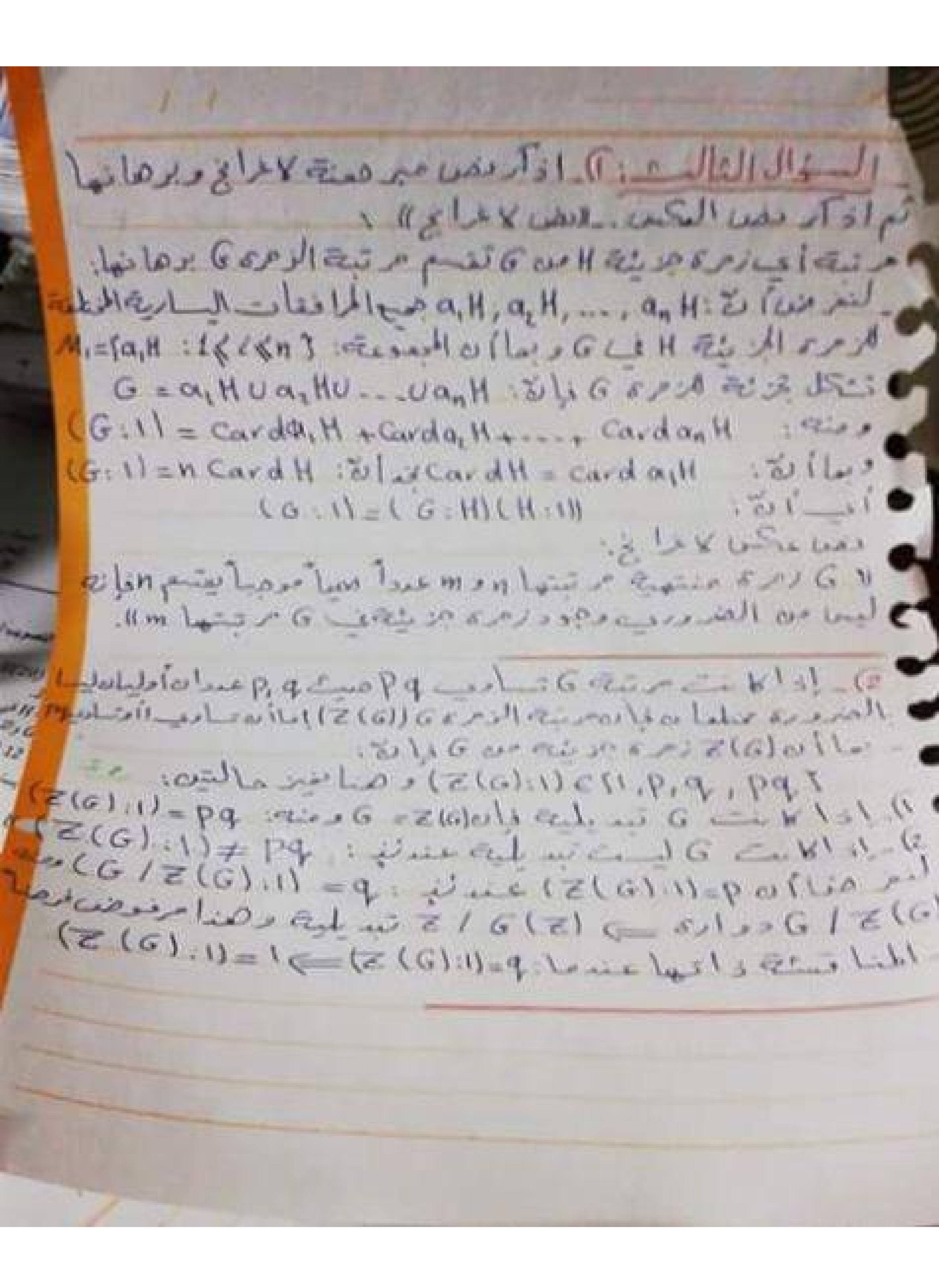
$\forall gH \in G/H$ فإنه $g \in G$ و $\pi(g) = g(H)$

وإنه: $\ker\pi = H$ ليكن $h \in H$ عندئذ:

$\pi(h) = h(H) = H$ ومنه $h \in \ker\pi$ أي $H \subseteq \ker\pi$

ليكن $k \in \ker\pi$ عندئذ: $\pi(k) = kH = H$ ومنه $k \in H$ أي

$\ker\pi \subseteq H$ ومنه التساوي $\ker\pi = H$ وهذه الملحقة تسمى التشاكل الطبيعي



السؤال الثالث: ١) اذكر نص مبرهنة لاغرانج وبرهانها ثم اذكر نص العكس "عكس لاغرانج".

مرتبة أي زمرة جزئية H من G تقسم مرتبة الزمرة G برهانها:

لنفرض أنّ: $a_1H, a_2H, \dots, a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية H في G وبما أن المجموعة: $\{a_iH : 1 \leq i \leq n\}$ تشكل تجزئة للزمرة G فإنّ: $G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_nH$

ومنه: $(G:1) = \mathrm{Card}\, a_1H + \mathrm{Card}\, a_2H + \dots + \mathrm{Card}\, a_nH$

وبما أنّ: $\mathrm{Card}\, H = \mathrm{card}\, a_iH$ فإنّ: $(G:1) = n\, \mathrm{Card}\, H$

أي أنّ: $(G:1) = (G:H)(H:1)$

نص عكس لاغرانج:

لـ G زمرة منتهية مرتبتها n و m عدداً صحيحاً موجباً يقسم n فإنه ليس من الضروري وجود زمرة جزئية في G مرتبتها m.

٢) إذا كانت مرتبة G تساوي pq حيث p, q عددان أوليان ... الضرورة ... مرتبة الزمرة G (Z(G)) إما أن تساوي ...

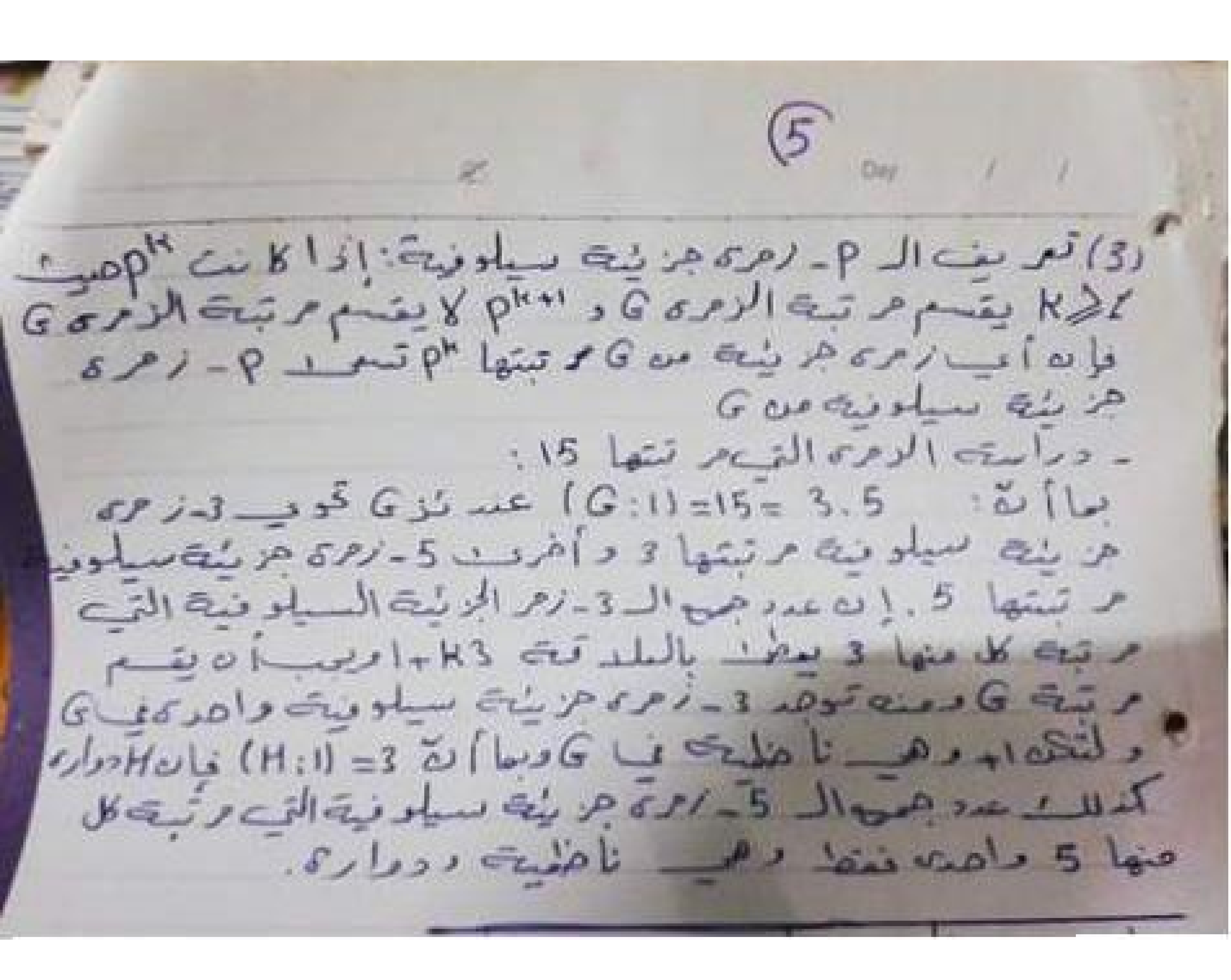
بما أن Z(G) زمرة جزئية من G فإنّ: $(Z(G):1) \in \{1, p, q, pq\}$ وهنا نميز حالتين:

١) إذا كانت G تبديلية فإنّ Z(G) = G ومنه: $(Z(G):1) = pq$

٢) إذا كانت G ليست تبديلية عندئذٍ: $(Z(G):1) \neq pq$

لنفرض أنّ $(Z(G):1) = p$ عندئذٍ: $(G/Z(G):1) = q$ ومنه G/Z(G) دوارية ⟸ G/Z(G) تبديلية وهذا مرفوض فرضاً

المناقشة ذاتها عندما: $(Z(G):1) = q \Longrightarrow (Z(G):1) = 1$



(3) تعريف الـ p - زمرة جزئية سيلوفية: إذا كانت p^k حيث
k أكبر يقسم مرتبة الزمرة G و p^{k+1} لا يقسم مرتبة الزمرة G
فإنه أي زمرة جزئية من G مرتبتها p^k تسمى p - زمرة
جزئية سيلوفية من G

- دراسة الزمرة التي مرتبتها 15:
بما أنّ: $(G:1)=15=3.5$ عندئذٍ G تحوي 3-زمرة
جزئية سيلوفية مرتبتها 3 وأخرى 5-زمرة جزئية سيلوفية
مرتبتها 5. إن عدد جميع الـ 3-زمر الجزئية السيلوفية التي
مرتبة كل منها 3 يعطى بالعلاقة $3k+1$ ويجب أن يقسم
مرتبة G ومنه توجد 3-زمرة جزئية سيلوفية واحدة في G
ولتكن H وهي ناظمية في G وبما أنّ $(H:1)=3$ فإنّ H دوارة
كذلك عدد جميع الـ 5-زمرة جزئية سيلوفية التي رتبة كل
منها 5 واحدة فقط وهي ناظمية ودوارة.

Scanned by CamScanner

2 - 2015

1- خطأ $\{0,2\}$ ليست زمرة جزئية لأن (+) ليست مغلقة

والعملية $2\in\{0,2\}$ ولكن $2+2=4\notin H$ حيث $H=\{0,2\}$

2- خطأ عدد عناصر $U_4(20)$ هي 4 لأن

$U(20)=\{1,3,7,9,11,13,17,19\}$

$U_4(20)=\{1,9,13,17\}$

3- خطأ غير منتهية

4- عناصر $U(30)=\{1,7,11,13,17,19,23,29\}$ وعناصر

$H=\{1,11\}$

$1H=\{1,11\}$

$7H=\{7,17\}$

$11H=\{11,1\}$ مكرر

$13H=\{13,23\}$

$17H=\{17,7\}$ مكرر

$19H=\{19,29\}$

$23H=\{23,13\}$ مكرر

$29H=\{29,19\}$ مكرر

هنا عدد المرافقات اليسارية يساوي 4

5- خطأ لأن 3 و 21 ليس أوليان فيما بينهما

$\gcd(21,3)\neq 1$

6- لدينا $a^{12}=e$ و ~~$\gcd(12,5)$~~: $lcm(12,5)=60$ مضاعف مشترك أصغر

و ~~[illegible]~~ $12=\frac{60}{5}$ فالعبارة صحيحة

7- قاعدة: اذا كان K يقسم n فإن $Z_n/\langle K\rangle\cong Z_k$

وبما أن 6 تقسم 30 عندئذٍ $Z_{30}/\langle 6\rangle\cong Z_6$ وفي Z_6

يوجد 6 عناصر فالعبارة خاطئة

8- خطأ لأن

$3\times 6=18 \bmod 7=4\neq 1$

9-

2 - 2015

9- صح $U_5(20)H = \{1, 11\}$ و $\{H, 3H, 7H, 19H\}$

10- صح اعتماداً على اذا كان $\varphi : G \to \bar{G}$ تشاكل زمري

واذا كان $\varphi(g) = g'$ فإن $\varphi^{-1}(g') = g \ker\varphi$

11- خطأ القاسم المشترك الأعظم لـ 12 و 30 هو ستة

12- خطأ ليس بالضرورة لأنه لا يوجد $a,b \in Z$ بحيث $Z \oplus Z$

دائرة ومولدة بالعنصر (a,b) عندئذ $Z \oplus Z = \langle (a,b) \rangle$ وبه

اذا كان $a = b$ عندئذ نجد أن $(1,2) \notin \langle (a,b) \rangle$ وهذا غير ممكن

واذا كان $a \neq b$ " " " $(1,1) \notin \langle (a,b) \rangle$ " " "

13- خطأ لأن رتبة العنصر 2 في Z_3 هي 3

ورتبة العنصر 3 في Z_4 هي 4

والمضاعف المشترك الأصغر لـ 3 و 4 هو 12

14- صح

husenali

...امعة البعث ...ية العلوم ...سم الرياضيات	امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2014 - 2015 أسئلة مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات	المدة: ساع... العلامة: ...00 الاسم:

...جب عن الأسئلة الآتية:

...سؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة $\{0,2\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة Z_6.

(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_4(20)$ من الزمرة $U(20)$ يساوي 5.

(3) مرتبة العنصر (-1) في الزمرة $(Q,+)$ تساوي 2.

(4) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1,11\}$ في الزمرة $U(30)$ يساوي 8.

(5) إن العنصر a^3 مولد للزمرة الدوارة $G=<a>$ والتي مرتبتها 21.

(6) إذا كانت $(G,.)$ زمرة و $a\in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^5 في G تساوي 12.

(7) عدد عناصر زمرة الخارج $Z_{30}/<6>$ يساوي 5.

(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة أولر $U(7)$ يساوي 6.

(9) عدد الزمر الجزئية في زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ يساوي 4.

(10) إذا كان $\varphi: U(30)\to U(30)$ تشاكلا وكان $Ker\,\varphi=\{1,11\}$ و $\varphi(7)=7$ فإن $\varphi^{-1}(7)=7\cdot \ker\varphi$

(11) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 12.

(12) إن الزمرة $Z\oplus Z$ دوارة لأن Z زمرة دوارة.

(13) رتبة العنصر $(2,3)$ من الزمرة $Z_3\oplus Z_4$ يساوي 6.

(14) إن $Z_2\oplus Z_2\cong U(8)$

السؤال الثاني (28 درجة): لتكن $(G,\cdot)$ زمرة ما و $Z(G)$ مركز الزمرة G، علل صحة ما يلي:

(1) أياً كان $a\in G$، فإن المجموعة $C(a)=\{x: x\in G; ax=xa\}$ هي زمرة جزئية من G.

(2) إذا كان $a,b\in G$ بحيث $a\cdot b\in Z(G)$ فإن $a.b=b.a$.

(3) الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G.

(4) كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري غامر.

السؤال الثالث (30 درجة): لتكن $(G,\cdot)$ زمرة منتهية ما.

(1) اذكر نص مبرهنة لاغرانج وبرهانها ثم اذكر نص عكسها.

(2) إذا كانت مرتبة G تساوي pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان، فإن مرتبة مركز الزمرة G $(Z(G))$، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq.

(3) لتكن مرتبة G تقبل القسمة على العدد الأولي P. عرف الـ P- زمرة سيلوفية، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 15.